

テンプレート上の白黒パターンの対称性による分類

平田 隆幸* 小川 淳司* 原田 義文*

Complete Classification of Black and White Patterns on Templates

Takayuki HIRATA, Atsushi OGAWA and Yoshifumi HARADA

(Received Feb. 29, 2000)

Black and white patterns on the small templates that consist of center cell, nearest neighbor cells, second nearest neighbor cells and third nearest neighbor cells are completely classified according to symmetry. The black and white patterns on the small templates that consist of N cells has 2^N available patterns. The patterns on four templates of which number of cells, N , are 1, 5, 9, 13 are reduced from 2^N available patterns to 1, 12, 102 and 1236 basic patterns, respectively.

Key Words : Black and White Pattern, Symmetry, Template, Classification, Basic Pattern

1 はじめに

パターン形成は、物理の分野のみならず広い分野でもっとも興味深いテーマの一つである。パターン形成をとりあつかう方法としては、偏微分方程式による方法、CML(Coupled Map Lattice)[1]による方法、セルオートマタによる方法などがある。それぞれの方法の違いは、偏微分方程式では、時空間そして状態が連続値をとり、CMLでは、時空間は離散値、状態は連続値をとり、セルオートマタでは、時空間、状態とも離散値をとるということである。コンピュータがとりあつかえるのは基本的には整数つまり離散値であることから、セルオートマタをもちいたパターン形成の研究は、上記の3つ方法の中でもっともコンピュータでのとりあつかいが容易であるという利点をもっている[2]-[4]。

セルオートマタをもちいてパターン形成をとりあつかう場合、一般的にセルオートマタのルールによってパターン形成を支配している相互作用を記述する。では、セルオートマタのルールとはどのようなものであろうか。現在の状態(時間軸を遡って過去の状態を考慮してもよい)からどのような未来の状態へ発展させるかを記述している対応表をつくるのがセルオートマタのルールを決

*知能システム工学科

めることである（例えば、対応表に基づくセルオートマタのルールをもちいてパターン形成をとりあつかった例としては、文献 [5] を参照）。さて、もっとも単純なセルオートマタは、状態が2値しかとりえないものである。離散空間である2次元正方格子によって空間をモデル化したときのセルオートマタにおける状態とは、2次元正方格子上の白黒パターンとなる。白黒パターンに基づいてセルオートマタのルールを決めるとき、可能な全ての白黒パターンに対して対応表を作る必要はない。一般的には、対称性を考慮して、基本となる白黒パターンに対してルールを決めてやればよいことが多い。では、対称性を考慮した基本となる白黒パターンとはどのようなものであろうか？本研究の目的は、小さなテンプレート上の白黒パターンを対称性によって分類することである。

なぜ小さなテンプレート上の白黒パターンであるのかというと、物理現象の場合は相互作用として近接相互作用を考えるだけで十分なことが多いためである。また、自然界には、しのぶ石 (mineral dendrite) などさまざまな白黒のパターン形成があり、複雑なパターンの多くは格子上の白黒パターンで近似できる。例えば、2次元正方格子上で白黒のパターン形成である DLA (Diffusion Limited Aggregation) モデルは、ヴィスコスフィンガリング (viscous fingering)、有機液体と金属塩水溶液との2液界面上での電析によってできる金属葉、破壊の成長などにもちいられている。それゆえ、小さなテンプレート上で白黒パターンを対称性によって分類しておくことは、例えば DLA などによる大きな白黒パターンが得られたときに、そのパターンの特徴を記述するための基礎パターンとしての利用が期待できる。

2 テンプレート上の白黒パターン

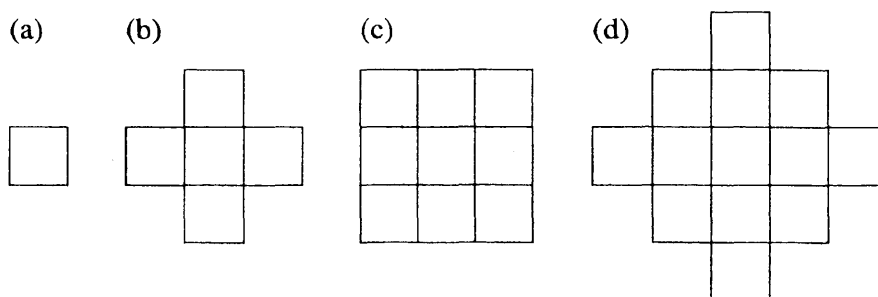


図 1: 2次元正方格子上の中心セルと近接セルから構成されるテンプレート。

2次元正方格子上で、中心セルとその近接セルによって構成された小さなテンプレートを考える。図1に2次元正方格子上の小さなテンプレートの例を示す。小さなテンプレートの各セルが白か黒の2つの状態をとるときのパターンを考えてみよう。セルが2つの状態しかとらない中心セルたった一つから構成される図1 (a) に示されるテンプレート上の白黒パターンは、パターンの多様性がないことから、あまり面白いパターンではない。しかし、最近接セル (nearest neighbor cell) を含むテンプレートを見ると、パターンの多様性は飛躍的に増大する。中心セルとその最近接セルから構成されるテンプレート (図1 (b)) 上の可能な白黒パターンの個数は、 $2^5 = 32$ である。次に、最近接セル、および中心セルから2番目に近い近接セル (second nearest neighbor cell)、3番目に近

い近接セル…を含むテンプレート上の可能なパターンの個数は、 $2^9 = 512$ 、 $2^{13} = 8192$ …となる。セルが2値の状態しかとりえないとすると、 N 個のセルを含むテンプレート上で可能なパターンの個数 $n(N)$ は、

$$n(N) = 2^N \quad (1)$$

である。

テンプレート上の可能な状態に基づいてセルオートマタのルールを作っていく場合、テンプレートを少し大きくするだけでセルオートマタのルールは膨大な数になってしまうことがわかる。しかし、 $n(N)$ 個のパターンの多くは、鏡映操作、回転操作によって同一のパターンとみなせる。このような、鏡映操作、回転操作によって、同一になるものの代表としての基本パターンを考えることは興味深いことである。例えば、テンプレートに基づいたセルオートマタのルールを構築するとき、物理現象の多くでは相互作用の等方性が仮定できるので、全てのパターンについてルールを考える必要はなく、基本パターンについてのみルールを構築すればよいからである。

3 対称操作

対称性からテンプレート上の白黒パターンを分類する。ここでは、対称操作の結果少なくとも図の中の1点の位置が変わらないという点対称について考えた[6][7]。テンプレート上の白黒パターンに対して回転操作 (rotation operation) および鏡映操作 (mirror operation) をおこない同一パターンとみなせるものの一つを代表として基本パターンと呼ぶことにする。

2次元での対称操作を考えよう。パターンの各点を (x, y) 座標によって記述する。 (x, y) 座標の原点は、テンプレートの中心と仮定する。対称操作 S は、点 (x, y) を以下のように変換する。

$$S : x, y \rightarrow x', y' \quad (2)$$

これは、対称操作 S によって、点 (x, y) が新しい座標 (x', y') に写されたということであり、 x', y' はそれぞれ x, y の関数として、 $x' = f(x, y)$ 、 $y' = g(x, y)$ で与えられる。さて、対称操作 S として、回転操作 n 、鏡映操作 m を考える。

中心点を固定してパターンを反時計回りに $2\pi/n$ 回転させる回転操作 n は、

$$n : x, y \rightarrow \left(\cos \frac{2\pi}{n}\right)x - \left(\sin \frac{2\pi}{n}\right)y, \left(\sin \frac{2\pi}{n}\right)x + \left(\cos \frac{2\pi}{n}\right)y \quad (3)$$

である。ここで、 n は整数であり、 n が2の場合は π 回転、3の場合は $2\pi/3$ 回転、4の場合は $\pi/2$ 回転に対応する。ここでは、2次元正方格子上の小さなテンプレートを対象としていることから、テンプレート上の白黒パターンがもつ対称性を調べるのに、 n が2、4のときの回転操作を考える。

鏡映操作 m は、

$$m_y : x, y \rightarrow -x, y \quad (4)$$

あるいは

$$m_x : x, y \rightarrow x, -y \quad (5)$$

である。 m_y は y 軸に対する鏡映操作であり、 m_x は x 軸に対する鏡映操作である。中心点を通る任意の軸に対する鏡映操作は、回転操作と組み合わせることによって実現できる。例えば、 $y = x$ とい

う軸に対する鏡映操作は、 $\pi/4$ の回転操作 ($n = 8$) をおこなった後、鏡映操作 m_y をおこなうことによって実現できる。

4 基本パターン

図 1 のテンプレート上の白黒パターンに関して、対称操作によってどのように縮約されていくかをみていこう。例えば、それぞれのセルが 2 つの状態をとるとき、図 1 (d) のテンプレート上の白黒パターンは $2^{13} = 8192$ の可能なパターンをもっているが、回転操作、鏡映操作により、1236 の基本パターンに縮約される。このことをより小さなテンプレートから順にみていくことにする。

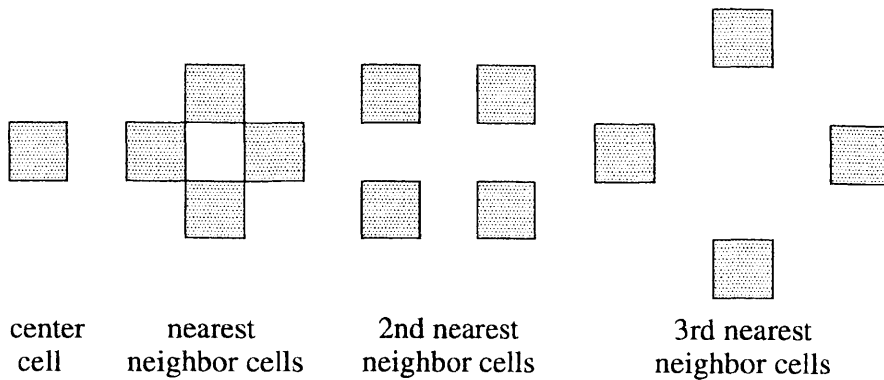


図 2: 中心セルと近接セル.

図 1 (a) の中心セル 1 つのみによって構成されるテンプレート上の白黒パターンは、可能なパターンの個数は、(1) 式より $2^1 = 2$ である。図 1 (a) のテンプレートの場合は、中心のセルが白か黒という 2 つのパターンしか取りえず、鏡映操作、回転操作をおこなってもパターンの縮退はない。(逆に言うと、基本パターンから出発して、鏡映操作、回転操作によってパターンを増やすことができない。) 図 1 (b) のテンプレートは、図 1 (a) のテンプレートに最近接セル 4 つを付け加えて、5 つのセルによって構成されている。図 2 に中心セル、最近接セル、2 番目に近接したセル、3 番目に近接したセルを示す。図 1 (b) のテンプレートのパターンは見方をかえると、中心セルと最近接セルのパターンの組み合わせと考えることができる。(1) 式より、図 1 (b) のテンプレート上の白黒パターンの可能なパターン数は、 $2^5 = 32$ である。これを中心セルの白黒パターンが 2 種類、最近接セルの白黒パターンが $2^4 = 16$ の組み合わせ、 $2 \times 2^4 = 2^5 = 32$ という見方でみても同じである。

図 3 に、中心セルおよび近接セルの基本パターン (回転操作によって同一となるもの) を示す。中心セルの白黒パターンは、対称操作によってもパターンの縮退はおこらず、2 種類のパターンである (図 3 (a))。しかし、最近接セルの白黒パターンは、図 3 (b) の列に示す 6 つの基本パターンに縮約される。図 4 に最近接セルの全白黒パターンと基本パターンを示す。図 3 の下部の数値は、近接セルの中の黒のセルの個数である (黒のセルが 2 つの場合は、2 種類あるので、2-a、2-b と分類した)。図 3 (b) のパターンは、黒のセルの個数が 0 と 4 のパターンは 1 個だけであるが、1 と 3 のパターンは $n = 4$ の回転操作によって同一となるものが 4 個、2-a のパターンも $n = 4$ の回転操作

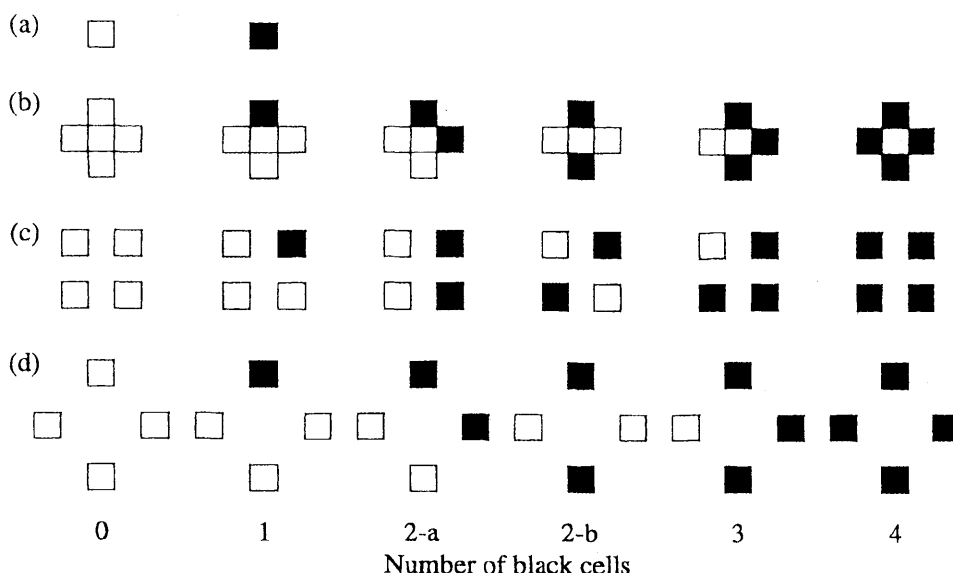


図 3: 中心セルと近接セル上の基本パターン.

で同一となるものが 4 個、2-b のパターンは $n = 4$ の回転操作で同一となるものが 2 個ある (図 4 参照)。図 3 (b) の 6 つの基本パターンは、16 種類のパターンが縮退したものである。すると、図 1 (b) のテンプレート上で可能な $2^5 = 32$ 個の白黒パターンは、図 3 (a) に示される中心セルの 2 種類の基本パターンと、図 3 (b) の最近接セルの 6 種類の基本パターンの組み合わせで、 $2 \times 6 = 12$ の基本パターンに縮約される。

次に、図 1 (c) のテンプレート上での白黒パターンを考える。この場合の可能な $2^9 = 512$ 個のパターンは、中心セルのパターンが 2 種類、最近接セルのパターンが 6 種類、2 番目に近い近接セルのパターンが 6 種類なので、 $2 \times 6 \times 6 = 72$ とはならない。図 5 に 51 個の基本パターンを示す。これに、図 5 において黒であった中心セルを白にしてつくった 51 個の基本パターンをあわせて、102 個の基本パターンが存在する。可能なすべての 512 個のパターンは、102 個の基本パターンに回転操作、鏡映操作を施すことによって作りだすことができる。つまり、図 1 (c) のテンプレート上の白黒パターンは 102 個の基本パターンに縮約される。図 5 中のパターンの上を示した数値は、それぞれ、中心セル、最近接セル、2 番目に近い近接セルにおける黒いセルの個数である。また、2-a、2-b は図 3 のパターンに対応している。

102 個の基本パターンがどのような variation や対称性をもつのかを Table 1 に示す。Table 1 では、Pattern という欄の*を含めた 3 桁の数値は、それぞれ、中心セル、最近接セル、2 番目に近い近接セルにおける黒いセルの個数である (中心セルが白のときと黒のときを区別しておらず、*で表わしている。*は、0 あるいは 1 をとる)。Table においては、この 3 桁の数値をもちいて白黒パターンを記述することにする (図 5 との違いは、2-a、2-b を区別していない点である)。Variation の欄に示されている数値は、それぞれのパターンがどれだけの個数の variation (基本パターンから回転操作、対称操作で生み出されるもの) をもつかである。例えば、*22 のパターンは 7 つの基

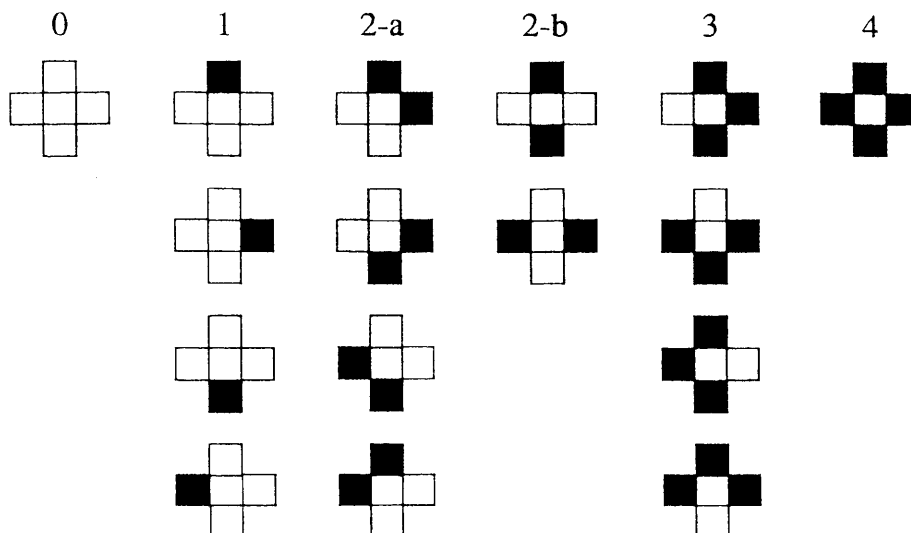


図 4: 最近接セル上の白黒パターンと基本パターン.

Table 1. Pattern and Symmetry.

Number of Pattern	Pattern	Variation
4	*00/*04/*40/*44	(1)
16	*01/*03/*41/*43	(4)
12	*02/*42	(4), (2)
16	*10/*14/*30/*34	(4)
64	*11/*13/*31/*33	$2 \times (8)$
48	*12/*32	$2 \times (8), 2 \times (4)$
12	*20/*24	(4), (2)
48	*21/*23	$2 \times (8), 2 \times (4)$
36	*22	$2 \times (8), 5 \times (4)$

The patterns of which number of variations are 1 and 2 have mirror and $\pi/2$ rotation symmetry, and mirror and π rotation symmetry, respectively. The patterns of which number of variations are 4 have only mirror symmetry. In the case of the patterns having 8 variations, there is no symmetry.

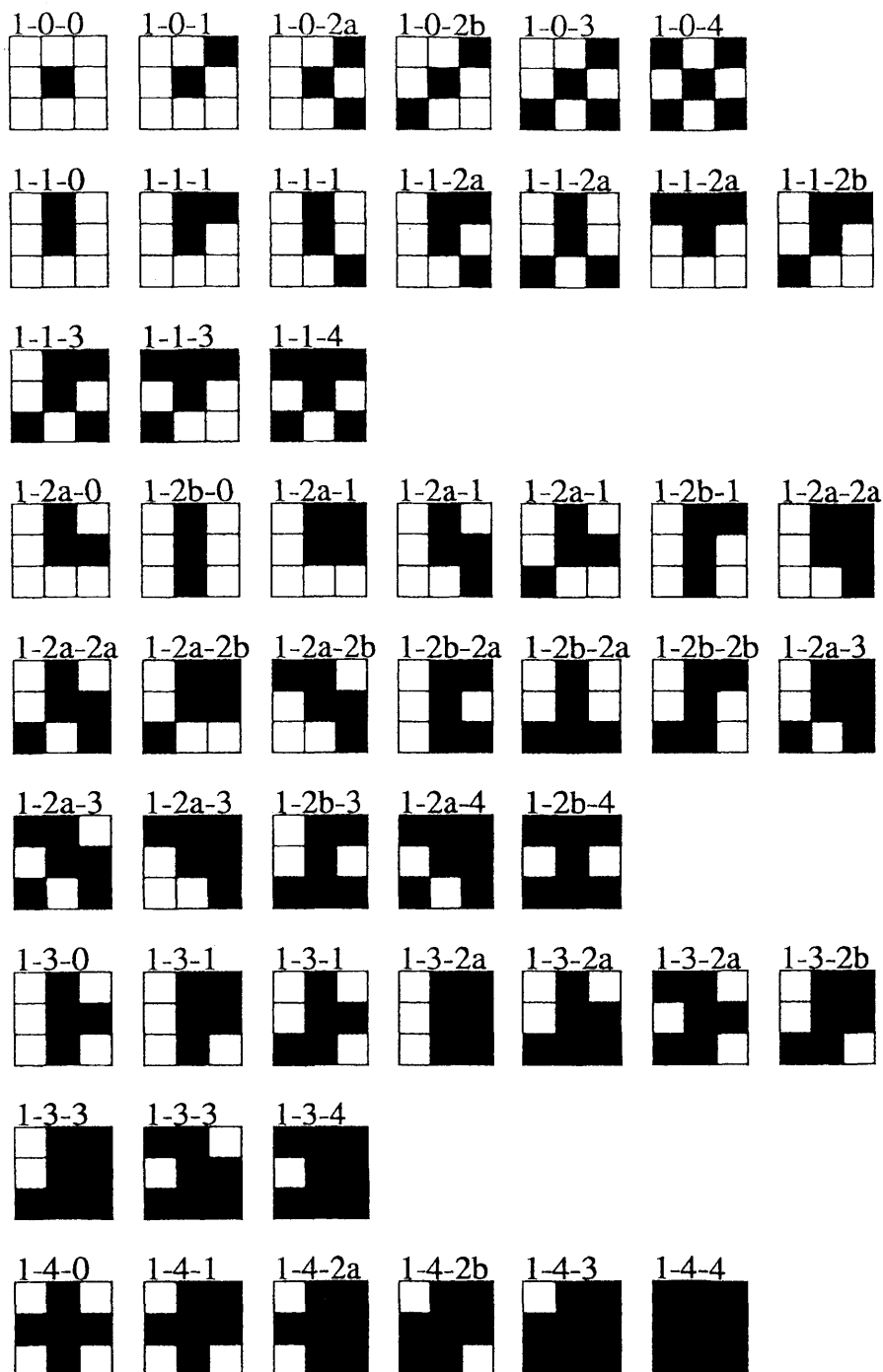


図 5: 中心セル、最近接セル、2 番目に近い近接セルによって構成されるテンプレート上の基本パターン。

本パターンをもち、それらの内の2つの基本パターンはそれぞれ8個の variation パターンをもち、5つの基本パターンはそれぞれ4個の variation パターンをもっている。

基本パターンがもつ対称性は、variation パターンの個数と関係している。variation パターンの個数が1個および2個の基本パターンは、それぞれ（鏡映対称、 $\pi/2$ 回転対称）および（鏡映対称、 π 回転対称）をもっている。また、variation パターンの個数が4個の基本パターンは、鏡映対称しかもたず、variation パターンの個数が8個の基本パターンには対称性は存在しない。このことは、variation パターンは、基本パターンに回転操作、鏡映操作を施すことにより作りだせることと対応している。逆に、パターンが対称性をもつということは、回転操作、鏡映操作によって新しいパターンが生じないということである。

Table 1 の基本パターンにおいて、 $0 \leftrightarrow 4$ と $1 \leftrightarrow 3$ というように 0 と 4 を入れ替えたもの、および 1 と 3 を入れ替えたものは同じカテゴリー（おなじ対称性をもつ）になることに注意して欲しい。これは、 $0 \leftrightarrow 4$ および $1 \leftrightarrow 3$ はその近接セルでの白黒を反転させたパターンであるからである。なお、Table 1 においては、上から *00、*01、*02、*10、*11、*12、*20、*21、*22 のパターンが示されている。そして、同じ欄には、 $0 \leftrightarrow 4$ および $1 \leftrightarrow 3$ を入れ替えた基本パターンが属していることがわかる。

さて、3番目に近い近接セルまでを含めたテンプレート（図1(d)）上の白黒パターンについて考える。図1(d)のテンプレート上の可能な $2^{13} = 8192$ の白黒パターンは、1236個の基本パターンに縮約される。図1(c)のテンプレート上の基本パターンについてまとめた Table 1 と同じ様に、図1(d)のテンプレート上の基本パターンについてまとめたものを Table 2 に示す。

図1(b)のテンプレート上の白黒パターンは、 $2^5 = 32$ から 12 の基本パターンへ、図1(c)のテンプレート上の白黒パターンは、 $2^9 = 512$ から 102 の基本パターンへ、図1(b)のテンプレート上の白黒パターンは、 $2^{13} = 8192$ から 1236 の基本パターンへと縮約された。なお、中心セルだけで構成される図1(a)のテンプレート上の全白黒パターンと基本パターンは両方とも2である。可能な全パターンに対する基本パターンの割合は、それぞれ、1.0、0.375、0.199、0.151 とテンプレートが大きくなるにしたがって小さくなる。

Table 3 に、図1(d)のテンプレート上の基本パターンを同じ種類の variation をもつものがどの基本パターンであるかをみやすいようにまとめなおしたものを示す。Pattern の記述にもちいた表記（最近接セル、2番目に近い近接セル、3番目に近い近接セルの黒のセルの個数）において、 $0 \leftrightarrow 4$ および $1 \leftrightarrow 3$ を入れ替えたものは同じ種類の variation をもつことがより明確にわかるだろう。また、0あるいは4を含むパターンは、variation がすくない。これは、0または4というのは中心からその距離にあるすべての近接セルが白あるいは黒であるという高い対称性をもっていることから理解できる。また、2をふくむ場合は、近接セルでのパターンの variation が多いことから、Pattern 表記において2を含むパターンは、多くの variation をもっている。例えば、*222 というパターンには、8個の variation をもつ22個の基本パターンと4個の variation をもつ10個の基本パターンが存在することがわかる。

5 まとめ

2次元正方格子上のテンプレートの上での白黒パターンを対称性により分類し、基本パターンを求めた。本研究においては、テンプレート上の白黒パターンを、テンプレートを中心からの距離により分解し、中心セル、最近接セル、2番目に近い近接セル、3番目に近い近接セルにおける黒のセルの個数という Pattern 表記によって分類した。その結果、中心セルのみによって構成されるテ

Table 2. Pattern and Symmetry.

Number of Pattern	Pattern	Variation
8	*000/*004/*040/*044/*400/*404/*440/*444	(1)
32	*001/*003/*041/*043/*401/*403/*441/*443	(4)
24	*002/*042/*402/*442	(4),(2)
32	*010/*014/*030/*034/*410/*414/*430/*434	(4)
128	*011/*013/*031/*033/*411/*413/*431/*433	$2 \times (8)$
96	*012/*032/*412/*432	$2 \times (8), 2 \times (4)$
24	*020/*024/*420/*424	(4), (2)
96	*021/*023/*421/*423	$2 \times (8), 2 \times (4)$
72	*022/*422	$2 \times (8), 5 \times (4)$
32	*100/*104/*140/*144/*300/*304/*340/*344	(4)
128	*101/*103/*141/*143/*301/*303/*341/*343	(8), $2 \times (4)$
96	*102/*142/*302/*342	$2 \times (8), 2 \times (4)$
128	*110/*114/*130/*134/*310/*314/*330/*334	$2 \times (8)$
512	*111/*113/*131/*133/*311/*313/*331/*333	$8 \times (8)$
384	*112/*132/*312/*332	$12 \times (8)$
96	*120/*124/*320/*324	$2 \times (8), 2 \times (4)$
384	*121/*123/*321/*323	$10 \times (8), 4 \times (4)$
288	*122/*322	$16 \times (8), 4 \times (4)$
24	*200/*204/*240/*244	(4), (2)
96	*201/*203/*241/*243	$2 \times (8), 2 \times (4)$
72	*202/*242	$3 \times (8), 2 \times (4), 2 \times (2)$
96	*210/*214/*230/*234	$2 \times (8), 2 \times (4)$
384	*211/*213/*231/*233	$12 \times (8)$
288	*212/*232	$16 \times (8), 4 \times (4)$
72	*220/*224	$2 \times (8), 5 \times (4)$
288	*221/*223	$16 \times (8), 4 \times (4)$
216	*222	$22 \times (8), 10 \times (4)$

The patterns of which number of variations are 1 and 2 have mirror and $\pi/2$ rotation symmetry, and mirror and π rotation symmetry, respectively. The patterns of which number of variations are 4 have only mirror symmetry. In the case of the patterns having 8 variations, there is no symmetry.

Table 3. Classification of patterns.

Number of Pattern	Pattern	Variation
8	*000/*004/*040/*044/*400/*404/*440/*444	(1)
32	*001/*003/*041/*043/*401/*403/*441/*443	(4)
32	*010/*014/*030/*034/*410/*414/*430/*434	(4)
32	*100/*104/*140/*144/*300/*304/*340/*344	(4)
24	*002/*042/*402/*442	(4), (2)
24	*020/*024/*420/*424	(4), (2)
24	*200/*204/*240/*244	(4), (2)
128	*011/*013/*031/*033/*411/*413/*431/*433	$2 \times (8)$
128	*110/*114/*130/*134/*310/*314/*330/*334	$2 \times (8)$
128	*101/*103/*141/*143/*301/*303/*341/*343	(8), $2 \times (4)$
96	*012/*032/*412/*432	$2 \times (8)$, $2 \times (4)$
96	*021/*023/*421/*423	$2 \times (8)$, $2 \times (4)$
96	*102/*142/*302/*342	$2 \times (8)$, $2 \times (4)$
96	*120/*124/*320/*324	$2 \times (8)$, $2 \times (4)$
96	*201/*203/*241/*243	$2 \times (8)$, $2 \times (4)$
96	*210/*214/*230/*234	$2 \times (8)$, $2 \times (4)$
72	*022/*422	$2 \times (8)$, $5 \times (4)$
72	*220/*224	$2 \times (8)$, $5 \times (4)$
72	*202/*242	$3 \times (8)$, $2 \times (4)$, $2 \times (2)$
512	*111/*113/*131/*133/*311/*313/*331/*333	$8 \times (8)$
384	*112/*132/*312/*332	$12 \times (8)$
384	*211/*213/*231/*233	$12 \times (8)$
384	*121/*123/*321/*323	$10 \times (8)$, $4 \times (4)$
288	*122/*322	$16 \times (8)$, $4 \times (4)$
288	*212/*232	$16 \times (8)$, $4 \times (4)$
288	*221/*223	$16 \times (8)$, $4 \times (4)$
216	*222	$22 \times (8)$, $10 \times (4)$

The patterns of which number of variations are 1 and 2 have mirror and $\pi/2$ rotation symmetry, and mirror and π rotation symmetry, respectively. The patterns of which number of variations are 4 have only mirror symmetry. In the case of the patterns having 8 variations, there is no symmetry.

ンプレートから 3 番目に近い近接セルまでを含んだ 4 つのテンプレート上で白黒パターンに関して、対称性による完全な分類をおこなうことができた (Table 1 から Table 3)。また、中心セル、最近接セル、2 番目に近い近接セル、3 番目に近い近接セルとテンプレートを大きくしていくにしたがって、可能な全パターンにおける基本パターンの割合が 1.0、0.375、0.199、0.151 と小さくなっていくことがわかった。今後の課題としては、より大きなテンプレート上での白黒パターンの分類をすることが期待される。

参考文献

- [1] 金子邦彦, 時空カオス : 時空間的複雑さの理解に向けて, 日本物理学会誌, **43**, 689-697 (1988)
- [2] Farmer, D., Toffoli, T., and Wolfram, S., Cellular Automata : Proceedings of an Interdisciplinary Workshop Los Alamos, New Mexico 87545, USA March 7-11, 1983, North-Holland Physics Publishing, Amsterdam (1984).
- [3] Toffoli, T. and Margolus, N., Cellular Automata Machines - A new environment for modeling -, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1987).
- [4] Adamatzky, A., Identification of Cellular Automata, Taylor & Francis, London (1994).
- [5] 平田隆幸, 井元政二郎, 確率セルオートマタモデルによる時空間地震活動パターン, 地震 **2**, **49**, 441-449 (1997).
- [6] Bernal, I., Hamilton, W. C., and Ricci, J. S., Symmetry - A stereoscopic guide for chemists -, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1972).
- [7] Jaswon, M. A., and Rose, M. A., Crystal Symmetry: Theory of Colour Crystallography, Ellis Horwood Limited, New York (1983).

